École des Hautes Études Commerciales

CONCOURS D'ADMISSION DE 1991

Mathématiques I

OPTION GÉNÉRALE

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

sont autorisées : règles graduées, tables de valeurs numériques **sans formulaire,** calculatrices de poche, y compris les calculatrices programmables et alphanumériques, à fonctionnement autonome, sans imprimante, sans document d'accompagnement et de format maximum 21 cm de long X 15 cm de large.

LIMINAIRE

Soit a un nombre réel strictement supérieur à -1. Pour tout nombre réel strictement positif x, établir la convergence de l'intégrale :

$$\int_x^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

puis celle de l'intégrale :

$$\int_0^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie I est l'étude de la fonction f_a définie sur $[0, +\infty[$ par la relation :

$$f_a(x) = \int_x^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

L'objet de la partie II est l'étude d'une méthode de calcul de valeurs approchées de la fonction φ définie pour $a > -1$ par la relation :

$$\varphi(a) = f_a(0) = \int_0^{+\infty} t^a \, \mathrm{e}^{-t^2/2} \, \mathrm{d}t$$

PARTIE I

1. *Cas particulier* $a = 0$

a) Montrer que la fonction f_0 est en fait définie sur $\mathbb{R}$.

b) Interpréter la fonction $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} f_0$ en termes de probabilités.

En déduire la valeur de $f_0(0)$, ainsi que les limites de f_0 en $+\infty$ et en $-\infty$.

2. *Propriétés générales de* f_a

a) Montrer que la fonction f_a est de classe C^∞ sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
Calculer les dérivées première et seconde de f_a.

b) Déterminer le sens de variation de f_a sur $]0, +\infty[$.

c) Étudier la limite de f_a en $+\infty$.

3. *Étude du cas* $a > 0$

a) Montrer que f_a est de classe C^1 sur $[0, +\infty[$. Calculer $f'_a(0)$.

b) Étudier la variation de la fonction f'_a.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

4. *Étude du cas* $-1 < a < 0$

a) Montrer que la fonction f_a est continue sur $[0, +\infty[$. Cette fonction est-elle dérivable en 0 ?

b) Montrer que la fonction f_a est convexe.

c) Donner l'allure de la courbe représentative de f_a.

Tournez la page S.V.P.

5. *Étude de f_a au voisinage de $+\infty$ $(a > -1)$*

a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout nombre réel strictement positif x :

$$f_a(x) = x^{a-1}\,e^{-x^2/2} + (a-1)\int_x^{+\infty} t^{a-2}\,e^{-t^2/2}\,dt$$

cette dernière intégrale étant convergente.

b) En déduire le signe de : $f_a(x) - x^{a-1}\,e^{-x^2/2}$

selon les valeurs de a.

c) Établir que pour $x > 0$ et pour $a > -1$: $\left|f_a(x) - x^{a-1}\,e^{-x^2/2}\right| \leq \dfrac{|a-1|}{x^2}\,f_a(x)$

(On pourra utiliser la décroissance de la fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^2}$ sur l'intervalle $[x, +\infty[$.)

d) En déduire qu'au voisinage de $+\infty$: $f_a(x) \sim x^{a-1}\,e^{-x^2/2}$

Application

Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$.

À l'aide d'une intégration par partie, justifier l'égalité : $f_{a+1}(0) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f_a(x)\,dx$

e) Déduire également de la question c) que si $-1 < a \leq 1$ et $x > 0$:

$$(1) \qquad \left|f_a(x) - x^{a-1}\,e^{-x^2/2}\right| \leq 2\,x^{a-3}\,e^{-x^2/2}$$

PARTIE II

Pour tout nombre réel $a > -1$, on pose : $\varphi(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^a\,e^{-t^2/2}\,dt$

Pour tout nombre réel strictement positif x, on écrit $\varphi(a)$ sous la forme :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x) \qquad \text{avec} \qquad g_a(x) = \int_0^x t^a\,e^{-t^2/2}\,dt$$

1. *Relation fonctionnelle vérifiée par φ*

a) Établir l'égalité : $$(2) \qquad \varphi(a+2) = (a+1)\,\varphi(a)$$

b) Pour tout nombre entier naturel n, exprimer $\varphi(a+2\,n)$ en fonction de $\varphi(a)$. Calculer $\varphi(0)$ et $\varphi(1)$. En déduire la valeur de $\varphi(n)$ pour tout nombre entier naturel n.

2. *Développement en série de $g_a(x)$*

Pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel t positif ou nul, on pose :

$$S_n(t) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k\,\frac{t^{2k+a}}{2^k\,k\,!}$$

a) Écrire la formule de Taylor avec reste intégral pour la fonction $u \mapsto e^{-u}$ sur l'intervalle $\left[0, \dfrac{t^2}{2}\right]$ à l'ordre n, où $n \in \mathbf{N}$.

En déduire le signe de $t^a\,e^{-t^2/2} - S_n(t)$ selon les valeurs de n. En conclure que, pour tout nombre réel strictement positif t et pour tout couple (p, q) de nombres entiers naturels :

$$S_{2p+1}(t) \leq t^a\,e^{-t^2/2} \leq S_{2q}(t)$$

A SUIVRE

b) Montrer alors que, pour tout nombre entier naturel non nul n :

$$\left|t^a\ e^{-t^2/2} - S_n(t)\right| \leq \frac{t^{2n+a}}{2^n\ n\ !}$$

(On distinguera deux cas suivant la parité de n.)

c) En conclure que, pour tout nombre entier naturel n et pour tout nombre réel strictement positif x :

$$(3) \qquad \left|g_a(x) - \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}\right| \leq \frac{x^{2n+a+1}}{2^n\ n\ !\ (2\ n+a+1)}$$

Justifier l'écriture :

$$(4) \qquad g_a(x) = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+a+1}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

3. *Méthode d'approximation de* $\varphi(a)$

On suppose désormais que $-1 < a \leq 1$. (On remarque que, grâce à l'égalité (2), on peut toujours se ramener à ce cas.)

On écrit :

$$\varphi(a) = g_a(x) + f_a(x)$$

Grâce à l'inégalité (1), on choisit une valeur de x pour laquelle $f_a(x)$ est suffisamment petit. Le nombre x étant ainsi fixé, on approche $g_a(x)$ par une somme partielle de la série (4) :

$$s_n(x) = x^{a+1} \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\ \frac{x^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

a) Déterminer le plus petit des nombres entiers naturels p tels que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$2\ p^{a-3}\ e^{-p^2/2} \leq 10^{-5}$$

b) En utilisant l'inégalité (1), montrer que pour $x = 5$ et pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$\left|f_a(x) - x^{a-1}\ e^{-x^2/2}\right| \leq 10^{-5}$$

c) On prend donc désormais $x = 5$. Pour $a \in]-1,\ 1]$ et pour tout nombre entier naturel k, on pose :

$$u_k = \frac{5^{2k}}{2^k\ k\ !\ (2\ k+a+1)}$$

Exprimer u_{k+1} en fonction de k et de u_k. Mettre en place un algorithme de calcul de u_n pour des valeurs données de n et de a.

d) Grâce à l'inégalité (3), déterminer un nombre entier naturel n tel que, pour tout élément a de $]-1,\ 1]$:

$$|g_a(5) - s_n(5)| \leq 10^{-5}$$

e) La méthode proposée permet-elle, avec les choix effectués pour x et n, d'obtenir des valeurs approchées de $\varphi(a)$ à 2×10^{-5} près lorsque a est donné dans l'intervalle $]-1,\ 1]$?

FIN